Excerpta ex Epistolis non-nullis, ultrò citróque ab Illustrissimis Viris, *Slusio* & *Hugenio*, ad Editorem scriptis, de famigerato *Alhazeni* Problemate circa Punctum Reflexionis in Speculis cavis aut convexis; & primò quidem ex Prima *Hugenii*, 26 *Junii* 1669. scripta:

—*Mitto Tibi hac occasione Constructionem Problematis* Alhazeni *nuper à me inventam, & à Collegis meis felicem satis judicatam. Problema est;*

Dato speculo cavo aut convexo, itemque oculo & puncto rei visæ, invenire Punctum Reflexionis.

Esto speculum ex sphæra quæ Centrum habeat A punctum, oculus vero sit in B, & punctum visibile in C, planúmque ductum per A,B,C, faciat in spæra circulum D d, in quo invenienda sint Reflexionis puncta. Per tria puncta A,B C, describatur circuli circumferentia; cujus sit centrum Z, occurrat autem ei producta A E, perpend. BC in R, & sit duabus R A, OA, tertia proportionalis NA, eritque NM, parallela BC, altera asymptoton. Rursus sint proportionales E *A*, $\frac{1}{2}$*A O, A I, & summâ IY æquali I* N, *ducatur Y M parallela A Z; eáque erit altera asymptotos. Denique sumtis I X, I S, quæ singulæ possint dimidium quadratum A O, unà cum quadrato A I; erunt puncta x & S in hyperbola, aut sectionibus oppositis* D *d, ad inventas asymptotos describendis, quarum intersectiones cum circumferentia D O, ostendent puncta Reflexionis quæsita. Constructio hæc, in omni Casu, quo Problema Solidum est, locum habet, prætcrquam in uno, ubi non hyperbola sed parabola describenda est; cum nimirum circumferentia per puncta A,B,C descripta, tangit rectam A E.* Vid. *Tab.* II. *Fig.* I.

Hæc Dn. Hugenius, quorum cùm fecisset Editor copiam Dn. Slusio 24 Sept. 1670; hic d. 22. Novemb. ejusdem anni hoc modo respondit;

—*Ut ad jucundissimas tuas respondeam, quas nuper admodum accepi, cùm variis de rebus agant, ab illa incipiam quæ mihi statim in oculos incurrit, ab* Alhazeni *nimirum Problemate, cujus constructionem à Viro* Nobilissimo *ad vos transmissam ut vidi, protinus eandem esse cum mea suspicatus sum; sed inspectis Adver-*

sariis

sariis meis, non leve discrimen reperi, ut mox videbis, & jam sanè vidisses nisi me prolixitas ante hac à scribendo deterruisset. Nequid tamen dissimulem, cum Nobilissimi Hugenii constructionem ad calculos revocarem, eandem omnino mecum analysin secutum esse deprehendi; sed cùm ex illa duæ nascantur effectiones, utraque per hyperbolam circa asymptotos; ille unam, ego alteram, uti faciliorem, selegeram. Evidens est autem, nihil aliud quæri hoc Problemate (si illud ad terminos merè Geometricos revocemus) nisi in dato circulo, (cujus centrum A, radius AP) punctum aliquod ut P, à quo ductis ad puncta data E B, inæqualiter à centro A distantia, rectis P E, P B, recta A P producta bisecet angulum E P B. Quod quidem varios casus recipit. Vel enim normalis ex A in rectam E B, nimirum A O, cadit inter E & B; vel ultra B. Si ultra, vel rectangulum E O B æquale est quadrato A O, vel majus vel minus. De casu æqualitatis videbimus infrà; nunc verò tres alios casus eadem ferè constructione complectemur. Per tria puncta A E B transeat circulus, ad cujus circumferentiam producatur A O in D. Ac si quidem punctum O cadat inter E & B, recta A O versus O producenda erit; sin autem ultra B, sitque rectangulum E O B majus quadrato AO, producenda erit versùs A; at si rectangulum quadrato minus fuerit, circulus in ipso puncto D, rectam AO secabit. Tum ductâ A X parallelâ E B, secante circulum datum in N, fiat ut rectangulum D A O ad quadratum A N, ita $\frac{1}{2}$ A X ad A H, quæ sumenda erit versùs X, si O cadat inter E & B, aut rectangulum E O B minus sit quadrato O A; at ex parte contraria, si sit majus. Ponatur nunc O Q æqualis A H (in directum E B primo & secundo casu, tertio verò, versùs E:) Tum fiant proportionales X A, N A, H K, sumenda omni casu versùs X: sectâque A O in V, ut sit eadem ratio K A ad A V, quæ A D ad A X; jungatur K V, ac producatur donec occurrat recta E M parallelæ O A, indefinitè productæ, in puncto L; erunt omni casu K L & Q L asymptoti Hyperbolæ, quæ per punctum O descripta, proposito satisfaciet: Hoc tantum discrimine, quòd primo & secundo Casu hyperbola per O, Problema solvet in speculo convexo, sectio vero ei opposita in concavo; at 3°. casu contrá, Hyperbola per O serviet concavo, ejus opposita convexo. Atque id quidem, cùm punctum V cadit inter A & O; nam si ultra O caderet, unica Hyperbola inter easdem Q L, K L descripta, tam speculo convexo quàm concavo satisfaceret. Cæterum si V caderet in ipsum punctum O, Problema tunc

Vid. Tab. II. Fig II, III, IV.

tunc planum esset, & ipsæ rectæ L Q, L K illud absolverent. Unde patet, Problematis hujus dari casus infinitos, qui per locum planum solvi possunt: quo magis veniâ digni videntur ij, qui illud per eundem locum universè solvi posse censuerunt, quòd ipsis aliquoties calculus feliciter cecidisset. Nulla enim dari potest trium punctorum A, E, B positio, (de casu æqualitatis *rectanguli E O B, & quadrati O A mox videbimus,) quæ non admittat circulum aliquem ex centro A describendum, ad cujus circumferentiam Problema per locum planum solvi queat. Hujus autem circuli radius, si tanti est, ita invenietur: In primo & secundo casu superioris constructionis fiat ut quadratum A X unà cum duplo rectangulo O A D, ad duplum quadratum A D; ita quadratum A O ad quadratum A N, erit A N radius quæsitus. At in 3° casu, faciendum est, ut quadratum A X minus duplo rectangulo O A D, ad duplum quadratum A D; ita quadratum A O ad quadratum A N.*

Construendus nunc superest alius casus, æqualitatis *nempe rectanguli E O B & quadrati A O, sive in quo circulus, per puncta A, B, E descriptus, tangit rectam A O. Rectè autem monuit Clarissimus* Hugenius, *hoc casu describendam esse* Parabolam, *quod tamen non ita intelligendum est, quasi per Hyperbolam solvi non possit, cùm & Hyperbolam & Ellipsin, imò infinitas (si quis methodo nostrâ uti velit) admittat; sed quod Parabolam quoque recipiat, quam alii casus respuunt. Eadem ratione temperandum est quod ait; Constructionem suam omni casu quo problema solidum est, locum habere; intelligit enim, levi mutatione semper inveniri Hyperbolam quæ proposito serviat: quod casûs à nobis superius constructos cum ejus constructione comparanti planum fiet. Ut autem ad casum* æqualitatis *redeam, & ne quid temerè asseruisse videar, Ecce tibi, non unam, sed duas parabolas, ac præterea hyperbolas oppositas quæ propositum absolvunt. Sint, ut priùs, puncta data E B, circulus ex centro A, ac alius per tria puncta A, E, B, cujus tangens sit A O, centrum D. Ductâ diametro N A D X, fiant tres proportionales X A, N A, Z A, cujus dimidium sit A L. Fiant iterum tres proportionales 2 O A, N A, I A, cujus dimidium sit K A, & perficiatur rectangulum L A O V; productâque L V in S, donec V S sit tertia proportionalis ipsarum A I, O V; axe S L, latere recto A I, vertice S, describatur parabola; hæc enim circulum secabit in punctis P, P quæsitis. Tantundem faciet alia, si perfecto rectangulo D A K C, & productâ K C in T, ita*

Vid. *Tab.* II. *Fig.* V.

ut

ut C T sit tertia proportionalis ipsarum A Z, DC, describatur circa axem T K, vertice T, latere recto, Z A: occurret enim circulo in Vid. *Tab.* II. *Fig.* VI. *iisdem punctis P P. Facilior adhuc est constructio per sectiones oppositas; factis enim, ut prius, tribus proportionalibus X A, N A, Z A, demittatur Z I normalis, tertia proportionalis duplæ A O, & A N. Erit itaque Z I major Z A, cum dupla A O minor sit X A: Tum in puncto I, inclinentur utrinque angulo semirecto ad lineam I Z, rectæ I Q, I M, & ab utraque parte indefinitè producantur; demum circa illas tanquam asymptotos describatur per A hyperbola, & alia ipsi opposita;* hæc *enim satisfaciet Problemati in speculo convexo,* illa *in concavo. Cùm verò, ut ostendimus, Z I semper major sit rectâ Z A, recta I M nunquam transibit per A. Non dabitur itaque casus, quo ex hac constructione, velut in præcedentibus, Problema per ipsas asymptotos solvi possit: Et tamen hoc quoque aliquando locum planum admittit; cùm scilicet accidit, ut recta X O ducta ad centrum D tangat circulum N P P; ipsum enim punctum contactus quæstionem solvit. Et hæc quidem de Problemate, quod hactenus multorum ingenia exercuit, & cujus solutionem ante aliquot annos absolvi, urgente Clar.* Gutiscovio, *Lovaniensi Matheseos Professore, qui sibi usui futurum aiebat; moliebatur enim nescio quid in Catoptricis: Sed mors manum injecit, neque enim, ut hoc obiter addam, quidquam hujusmodi in schedis ejus repertum esse intellexi.*

Hactenus Dn. *Slusius*; cujus Epistolæ Apographum cùm, Authore conscio, Editor communicasset Dn. *Hugenio*, simulque ex aliis laudati *Slusii* literis, 9 Martii 1671. datis, innuisset, invenisse ipsum duas alias ejusdem Problematis Analyses, priori illâ faciliores, & constructione inter se, & ab illa, diversas; quin imò præparationem quandam Generalem, ex qua Problematum omnium, quæ ad Punctum Reflexionis in Speculis Sphæricis, concavis & convexis, determinandum spectant, Analysis facilè deduci possit: Dn *Hugenius* Gallicè rescripsit 7 Novem. 1671. (tardiùs, ob incommodam puto valetudinem,) in hanc sententiam;

Obstrictum me tibi fateor, eò quod Slusianam *Problematis* Alhazeni *constructionem impertiri voluisti. Exurgit illa, ut rectè notavit, ex eadem Analysi cum mea, ab eaque non longe discrepat; videtur tamen, meam esse naturalem magis, idque ob Hyperbolæ Asymptoton dispositionem, nec tamen plus operæ requirit quam* Slusiana.

Oportet

Oportet equidem, ut ipſe hac de re cum eo agam, qui eſt Geometrarum, quos novi, omnium doctiſſimus candidiſſimuſque; ſaltem ut copiam ab ipſo petam facilioris adhuc illius Analyſeos, quam inveniſſe ſe de hoc Problemate affirmat.

Sic Dn. *Hugenius*; qui cum aliis fortè negotiis, vel etiam adverſâ valetudine impeditus, ipſi Dn. *Sluſio* de hoc argumento ſcribere differret, *Sluſius* verò dicti *Hugenii* mentem ab harum Editore accepiſſet, ipſe (*Sluſius*, inquam,) literas hîc ſubjunctas, Editori miſſas, repoſuit.

Antequam ad literas tuas, 22° menſis elapſi datas, reſpondeam, officii mei ratio poſtulat hoc Anni novi principio, ut fauſtum illum ac felicem cum longa ſimilium ſerie, Tibi, Vir Clariſſime, ac Societati Illuſtriſſimæ & ὅλως βασιλικῇ, apprecer, quò ea quæ felicibus adeò auſpiciis cæpta ſunt, porrò proſequi, ac tandem, magno Reip. literariæ emolumento, ad exitum perducere Vobis liceat. Literas verò tuas quod attinet, gratias habeo maximas pro iis, quæ me ſolitâ humanitate ſcire voluiſti. Cæterum à Cl. Hugenio *nihil adhuc accepi, aliis, ut exiſtimo, ſtudiis occupato. Quoniam autem Tu, V. C. videri vis meas eſſe aliquid putare nugas, accipe, quæ circa* Alhazeni *Problema, curis ſecundis, meditatus ſum.*

Datus ſit Circulus, cujus centrum A; *puncta data ſunt* D & d. *Supponatur factum quod quæritur; ſitque Radius incidens* DE, *reflexus* E d; & *ex puncto reflexionis* E *cadat in junctam* D A *normalis* E I, & *in eandem, ex* d, *normalis* d N, *occurrántque eidem Tangens* E C & *Radius* d E, *productus in* B. *Sit nunc* $DA = z$. $AI = a$. $NA = n$. $EI = e$. $dN = b$. $BA = y$. $AE = q$. $CA = x$. *Igitur, cum anguli*, DEC, CEB, *ſint æquales*, & *angulus* CEA *rectus, ex hypotheſi, erunt tres*, DA, CA, BA, *harmonicè proportionales, (hoc enim facilé oſtenditur.) Erit itaque ut* DA *ad* BA, *ita* DC *ad* CB; *ſive in terminis Analyticis*, $z \mid y \mid z - x \mid x - y$; & $2zy - xy = zx$ *ſive* $\frac{2zy}{z+y} = x$. *Cum autem Rectangulum* CAI, *ſive* xa *ſit æquale Quadrato* AE *ſive* qq, *erit* $x = \frac{qq}{a}$, & *per conſequens* $\frac{2zy}{z+y} = \frac{qq}{a}$ *ſive* $\frac{zqq}{2za - qq} = y$. *Porrò, eſt ut* dN *ad* EI, *ita* NB *ad* IB; *ſive* $b \mid e \mid y - n \mid y - a$. *Itaque* $ye - ne = by - ba$; & $y = \frac{ba - ne}{b - e}$. *Igitur* $\frac{zqq}{2za - qq} = \frac{ba - ne}{b - e}$ *ſive* $2zbaa - 2znae - qqba + qqne = bzqq \ zqqe$. *Quæ æquatio eſt ad Hyperbolam circa aſymptotos, cujus conſtructio cum Circulo dato, Problemati ſatisfacit. Cùm verò, ob Circulum, ſit* $qq = aa + ee$, *ſi loco* $2bzaa$ *ponatur ejus valor* $2bzqq - 2bzee$, *habebitur alia pariter ad Hyperbolam circa aſymptotos*, $bzqq - 2bzee \cdot 2znae - qqba + qqne = - zqqe$. *Et hac methodo, atque illâ, quam in libello noſtro de Analyſi expoſuimus, prodibunt infinitæ Æquationes ad Hyperbolas & Ellipſes, quæ cum Circulo dato Problema abſolvent; niſi quod Effectiones plærumque intricatiores evadant quàm ut operæ pretium ſit illas aggredi: Conſtrui tamen poterunt eo modo, quo uſi ſumus in Ellipſi, ejuſdem libelli noſtri p. 62.*

V. *Tab.* II. *Fig.* VII.

 Retuli.

Retulimus, ut vides, calculi nostri summam ad lineam D A; *sed satis animadvertis, non majori difficultate referri potuisse ad* d A *(quæ pariter data est,) ductis scil. lineis, quas in Schemate punctis adumbravimus. Verùm novo calculi labore non est opus.* *Si enim rectæ* d A, *ejusque partibus, eosdem ac prius terminos analyticos adhibeas, h. e si ipsam* d A *facias æqualem* z, D n = b. n A = n. A I = a. i E = e, &c; *prodibit eadem Æquatio quæ prius; & infinitas alias Hyperbolas & Ellipses obtinebis, quæ cum Circulo dato Problemati satisfacient.* Φορτικὸς *essem, si singulos casus prosequi vellem, cùm illorum Æquationes solâ signorum* + *&* − *variatione discernantur.* Unum *tamen excipio, nim. cùm angulus* d A D *est rectus; ejus enim æquatio habetur, expunctis à priori æquatione partibus, in quibus* n *(quæ in nihilum abit) invenitur: nempe hæc,* $2zbaa - qqba = bzqq - zqqe$, *vel (pro* $2zbaa$ *posito ejus valore)* $zbqq - qqba = 2zbee - zqqe$.

Vid. eandem *Fig.* VII.

Sed animadvertendum est, quòd, licèt referendo Analysin ad rectam D A, *statim sese offerant in æquatione duæ Hyperbolæ; & aliæ totidem à prioribus diversæ, cùm refertur ad rectam* d A; *easdem tamen omninò Parabolas haberi, ad utramvis rectarum* d A *vel* D A *referatur Analysis: cujus rei ratio levi consideratione Tibi occurret.*

Patere nunc, V. Cl. ut superiorem Analysin omnibus, quæ circa Speculorum Sphæricorum reflexionem proponi solent, Problematibus applicem, novo facto Schemate. Sit igitur, ut priùs, Circulus, cujus centrum A, *punctum* D *datum, & ab eo radius incidens* D E, *cujus reflexus sit* E Q. *Junctâ* D A, *ducatur ad illam Tangens* E C, *& normalis* E I; *& producatur ad eandem, recta* Q E B; *denominentur partes ut priùs* D A = z. C A = x. A E = q. B A = y. A I = a. I E = e. *Igitur, propter tres* D A, C A, B A, *Harmonicè proportionales, & tres* C A, A E, A I, *Geometricè, semper habebitur æquatio* $y = \frac{zqq}{2za - qq}$, *in quodcunque Circuli punctum cadat* D E. *Itaque, si quæratur punctum* E, *in quod si radius* D E *incidat, reflectatur* παραλλήλως *diametro* L A V *normali ad* D A; *reflexus* Q E, *productus transibit per* I, *ut patet; &* I *ac* B *coincident. Igitur* $a = y = \frac{zqq}{2za - qq}$; *sive,* $aa - \frac{1}{2}\frac{qqa}{z} = \frac{1}{2}qq$, *& Problema per plana solvetur.*

V. *Tab.* II. *Fig.* VIII.

Si quæratur punctum, à quo radiùs reflectatur parallelus alteri cuilibet lineæ, ut A K *(ductæ ex centro* A;) *ducatur ad illam, ex puncto* I, *Tangens* K L = d. *Evidens est, Triangula* A K L, E I B, *fore similia, cùm omnia latera unius parallela sint lateribus alterius &c. Itaque* A L *ad* L K *ut* E I *ad* I B, *sive* q | d | e | a - y; & $\frac{qa - de}{q} = y = \frac{zqq}{2za - qq}$; & $zq^3 = 2qzaa - 2zdae - q^3a + qqde$; *sive, pro* aa *posito* $qq - ee$, $zq^3 = 2zq^3 - 2zqee - 2zdae - q^3a + qqde$. *Utraque autem æquatio est ad Hyperbolam circa asymptotos, quæ cum Circulo dato Problema absolvit.*

Pro-

Proponatur nunc efficere, ut radius reflexus transeat per datum punctum N (ut in Problemate Alhazeni,) vel ut productus versus punctum reflexionis E occurrat dato puncto N. Ex N cadat in A L normalis $NO = n$, sitque $AO = b$. Patet esse, ut A O ad differentiam ipsarum ON, A B, ita E I ad I B, h. e. $b \,|\, n - y \,|\, e \,|\, a - y$; vel $b \,|\, y - n \,|\, e \,|\, a - y$. Igitur $\frac{ba - ne}{b - e} = y = \frac{zqq}{2za - qq}$. Unde $2zbaa - 2znae - qqba + qqne = bzqq - zqqe$; nim. illa ipsa æquatio Problematis Alhazeniani quam suprà innuimus: Vel, secundo casu, $\frac{ba + ne}{b + e} = y = \frac{zqq}{2za - qq}$, sive $2zbaa + 2znae - qqba - qqne = zbqq + zqqe$. De quibus æquationibus plura non addo, cum vel nimia sint fortasse quæ supra diximus.

Atque hæc sunt Problemata, quæ circa Punctum reflexionis proponi solent in quibus tamen finitam puncti D dati distantiam supposuimus. Sed facilior erit Analysis, si supponamus Infinitam. Secta enim C A bifariam in G, constat ex proprietate trium, D A, C A, B A, Harmonicè proportionalium, tres D G, C G, B G, fore Geometricè proportionales, supposita quâcunque puncti D distantiâ. Itaque, si supponatur Infinita, B G abibit in nihilum, & punctum B cum puncto G coincidet. Igitur A B erit perpetuò æqualis B C; erit itaque $CA = 2y$, & Rectangulum C A I, æquale Quadrato A E, dabit, in terminis Analyticis, $2ay = qq$, sive $y = \frac{qq}{2a}$: Cùmque distantia puncti D supponatur infinita, erit E D parallela A C. Itaque, si quæratur radius reflexus parallelus A L, quoniam eo casu a & y coincidunt, erit $a = y = \frac{qq}{2a}$, sive $aa = \frac{1}{2}qq$: Si quæratur ut parallelus sit A K, erit rursus $q \,|\, d \,|\, e \,|\, a - y$; & $\frac{qa - de}{q} = y = \frac{qq}{2a}$, sive $2qaa - 2dae = q^3$. Si petatur ut transeat per N, erit, ut suprà, $\frac{ba \pm ne}{b \pm e} = y = \frac{qq}{2a}$, & $2baa \pm 2nae = bqq \pm qqe$: quæ æquationes sunt quoque ad Hyperbolas circa Asymptotos, nisi N punctum esse supponatur in A L; nam, cùm tunc n abeat in nihilum, sublatis ab æquatione partibus, in quibus n continetur, residuæ dant æquationem ad Parabolam, ut suprà quoque monuimus. V. eand. Fig. VIII.

Non exspectas, V. Cl. ut cum specula Concava hactenus in exemplum adduxerim, nunc agam de Convexis. Scis enim, eandem esse prorsus Analysin, & Æquationes solâ signorum + & — variatione distingui. Scis, Parabolam vel Ellipsin, quæ uni satisfacit, satisfacere alteri; &, si Hyperbola in Convexo problema absolvat, ejus oppositam paria facere in Concavo. His itaque omissis, addo tantùm, eâdem Analysi haberi in Speculis Concavis focos & spatia, quæ radii occupant in axe, datâ qualibet puncti lucentis distantiâ: Sed mirâ facilitate, cùm radii supponuntur paralleli; quod tamen nonnullo circuitu à quibusdam demonstrari vidi. Nam in Speculo Concavo E E, cujus centrum A, si radius extremus reflecti intelligatur ad axem A R in B, ductâ tangente E C, erit $CB = BA$. Bisecetur semi-axis V. Tab. II. Fig. IX.

AR in Q; erit itaque Q focus. & QB spatium quæsitum. Est autem QB dimidia CR (ob æquales AQ, QR, AB, BC,) h. e. dimidia excessûs secantis arcûs ER supra sinum totum. Igitur si arcus ER sit (e. g.) *grad.* 9, *erit* AC 101246, *&* BQ $\frac{623}{100000}$ *ipsius* AR.

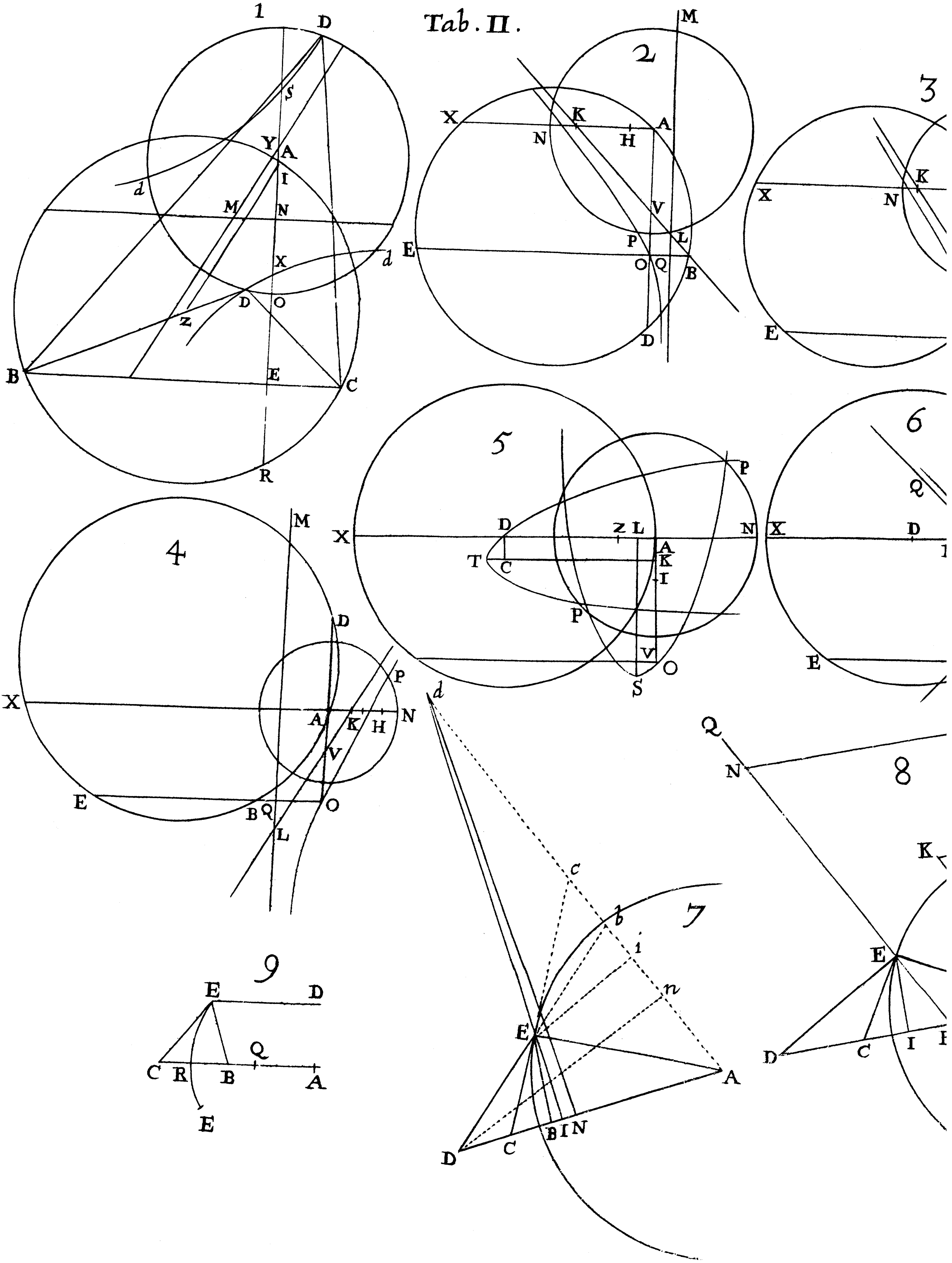
Sed nimium Te moror in tricis hisce Geometricis, quibus me defunctum existimabam, nisi quòd occurrant sæpe vel aliud agenti. Itaque si Deus vitam & otium dederit, hoc vere fortassis in publicum emittam mea, de Problematum determinatione, περὶ μοναχοῦ λόγȣ, *de Tangentibus Curvarum,* μελετήματα; *præsertim cum Cl.* Riccius *me moneat, à se, studiis aliis occupato, nihil expectandum esse; & nuper* ἀπροσδοκήτως *inciderim in methodum facillimam ea demonstrandi, quæ longiore circuitu olim inveneram; utrâque tamen viâ in brevissimam ac facillimam Regulam desinente. Sed quid futurum sit,* Θεῶν ἐν γούνασι κεῖται : *Ego enim Pyrrhoniano more hactenus* οὐδὲν ὁρίζω.* *Vale, Vir Cl. meque ex asse tuum, ut Soles, amare perge. Dab.* Leodii VI. *Kalend.* Januar. *st. n.* CIↃIↃCLXXII.

*Quid hîc de *Tangentibus Curvarum* pollicetur Vir Illustrissimus, præstita ab eo vide in Transact. N°. 95.

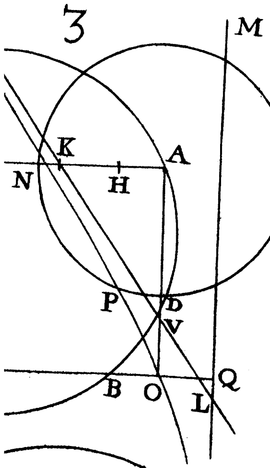
Hæc Dn. *Slusius*; quæ quomodo placuerint Dn. *Hugenio*, quidque hic iis rescripserit, aliâ occasione, cùm unâ vice omnia huc spectantia tradi commodé nequeant, Deo dante, exhibebimus.

An Accompt

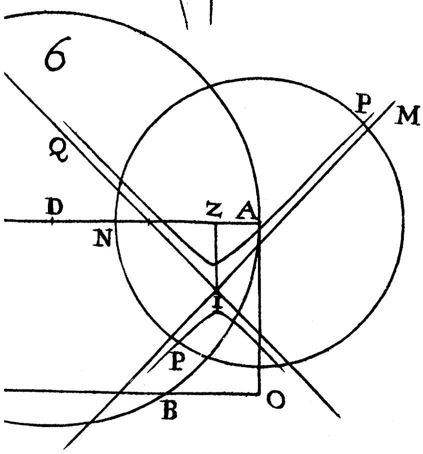
Tab. II.



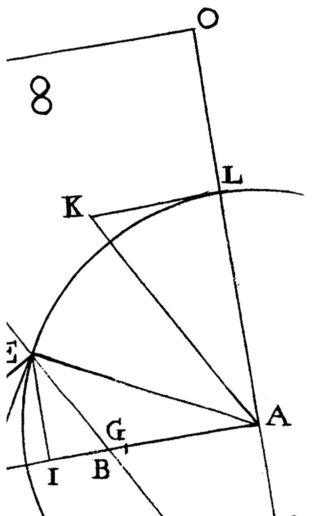
3



6



8



Tab. II.